

## Álgebra e Geometria Algébrica

O grupo de álgebra comutativa e geometria algébrica sob os auspícios do Instituto do Milênio é formado por cerca de doze pesquisadores, com uma rede de colaboradores em dez universidades do país. Conta atualmente com 11 alunos de doutorado e 10 de mestrado. O grupo detém um importante portfolio de colaboração internacional, incluindo cerca de 30 instituições em 11 países. Todos os membros do grupo estão ativos em pesquisa, o que lhes concede uma marcada influência científica em nível nacional e crescente inserção internacional. Sua produção científica é de acentuada diversificação e publicada em periódicos de reputação internacional. Abaixo descrevemos brevemente o conteúdo da produção no período, seguido da lista de publicações.

**Critérios de biracionalidade entre variedades projetivas:** Neste contexto foi estabelecido um critério algébrico (i.e., em termos de anéis e módulos especiais) de biracionalidade. A expressão final do critério é dada em termos de uma certa matriz polinomial e de seu conteúdo. Como bonificação obtém-se, de maneira explícita, a aplicação inversa de uma aplicação biracional. Além disso, foram descritas várias conjecturas que, se confirmadas, trariam conseqüências curiosas para a teoria, não estabelecidas anteriormente.

**Teoria algébrica de divisores livres:** Focalizam-se, no contexto polinomial, os divisores livres de Saito. Nesta abordagem, foram obtidos vários resultados, sem pressupor os antecedentes no caso analítico. Foram encontradas formulações alternativas para a noção de divisor livre de Koszul, introduzida pela escola de Sevilha, recuperando alguns de seus resultados no caso polinomial. Em paralelo, foi produzido um contra-exemplo para a inexistência de divisores livres homogêneos irredutíveis em três variáveis.

**Álgebras de Rees de módulos especiais:** Trata-se de amplo panorama de contorno variável. O trabalho realizado expressa o esforço cumulativo no desenvolvimento de uma teoria geral de álgebras de Rees ("blowup"), no caso de módulos e representa um amplo repertório da teoria de módulos e ideais com ênfase em propriedades homológicas e genéricas. Na seqüência, alguns resultados parciais foram obtidos, em conjunto com B. Ulrich (Purdue U.) e W. Vasconcelos (Rutgers U.), sobre a álgebra de Rees do módulo das diferenciais de Kähler de uma álgebra afim.

**Aritmética das curvas elípticas:** Dada uma fibração de variedades algébricas definidas sobre corpos de números, foi generalizado, com M. Hindry (Paris VII), um resultado anterior para o caso de fibração em curvas de uma superfície sobre uma curva. Foi provado que a soma do posto do grupo de Mordell-Weil da variedade de Picard da fibra genérica com o posto do grupo de Néron-Severi desta fibra pode ser obtida como soma de resíduos de séries de Dirichlet, cujos coeficientes são traços médios dos automorfismos do Frobenius étale, relativos ao primeiro e segundo grupos de cohomologia, se, e somente se, a conjectura de Tate, para divisores, é válida em ambas as variedades. Como aplicação deste resultado ao problema, não trivial, de estudar a variação do posto de variedades abelianas sobre corpos de funções, foi

obtida uma estimativa do que ocorre com o posto de uma variedade abeliana sobre o corpo de funções de uma curva sobre um corpo de números, quando se estende a base por um recobrimento galoisiano definido sobre o corpo de números. Em particular, quando se consideram torres de corpos de funções sobre corpos de números que provêm de pontos de torção de curvas elípticas e variedades Jacobianas, o posto médio da variedade abeliana ao longo da torre é inferior ao predito pela heurística.

**D-módulos:** Os principais avanços se deram em duas frentes, a saber: a criação de algoritmos algébricos para determinar se uma dada folheação holomorfa do plano projetivo complexo tem solução algébrica (em colaboração com L. M. Schechter, aluno de iniciação científica) e a determinação de novas famílias de derivações simples e suas aplicações. No primeiro caso, obteve-se um algoritmo rápido que cria mais uma ponte entre teoria de folheações e álgebra, através do uso do grupo de Galois. No segundo caso, tem-se a caracterização de uma vasta família de derivações simples do anel de polinômios, além da construção de novos exemplos de D-módulos simples não holônomos sobre variedades afins cujo grupo de Picard não é trivial.

**Caracterização aritmética de corpos, via teoria de valorizações (Krull) e teoria de formas quadráticas (Witt):** Foi dada continuidade ao estudo de grupos profinitos, em particular de pro 2-grupos com dimensão cohomológica menor ou igual a dois. Essa pesquisa vem sendo desenvolvida em conjunto com D. Kochloukova (Unicamp) e P. Zalesskii (UnB). No trabalho sobre a estrutura de grupos de Galois da máxima p-extensão de corpos, teve-se sucesso em descrever esses grupos de Galois como grupos que podem ser obtidos a partir de certos grupos "básicos" através das operações de produto livre e produto semidireto na categoria dos pro p-grupos. Estendendo o conceito de "Radical de Kaplansky" para primos ímpares foi possível determinar a natureza aritmética da componente livre, cuja existência é estabelecida pelo Teorema do Subgrupo de Kurosh, associando-a ao radical do corpo. Como consequência dos trabalhos realizados sobre pro 2-grupos com dimensão cohomológica 2, e o estudo do radical de um corpo, foi estabelecida a validade da conhecida Conjectura do Tipo Elementar para corpos com radical trivial. Esses resultados estão sendo estendidos para corpos com radical não trivial. Isso é particularmente interessante pois a trivialidade do radical não se mantém mesmo para uma extensão finita.

**Folheações algébricas e holomorfas:** Foram, em colaboração com S. Kleiman (MIT), descritas propriedades de conjuntos algébricos invariantes por folheações, obtendo vários resultados que generalizam e melhoram resultados de Jouanolou, Lins Neto, Soares, Campillo, Carnicer, Du Plessis e Wall relacionados com o problema de Poincaré. Foi demonstrado que a única subvariedade própria invariante de uma folheação genérica sobre uma variedade projetiva não singular é constituída por pontos isolados. Foram, também, construídos exemplos de folheações sem soluções algébricas.

**Geometria enumerativa:** Foi realizado um avanço substancial na compreensão da família de curvas de gênero 2 mergulhadas em grau 5 em  $P^3$ . Para o caso correspondente no plano, a saber, a família de pentágonos, igualmente definida por uma quádriga e 2 cúbicas, foi explicitada uma seqüência de explosões (são 7) para encontrar um bom espaço de parâmetros. Foi também obtida uma descrição explícita de uma seqüência de explosões que planifica a família cujo membro geral é a união de uma cônica e dois pontos em  $P^3$ . Esta aparece naturalmente como um dos centros de

explosão para o caso de interesse original: degenerações de interseções completas. Várias rotinas computacionais foram desenvolvidas para efetuar cálculos relevantes ao problema.

**Pontos racionais de curvas sobre corpos finitos:** Foram realizadas construções explícitas de curvas com muitos pontos sobre corpos finitos, obtendo em particular novos recordes para certos gêneros e corpos finitos pequenos. Foram obtidos resultados gerais sobre a classificação de certas curvas maximais a partir de seu gênero e com hipóteses sobre lacunas de Weierstrass num ponto racional, gerando uma fonte de exemplos de curvas maximais de mesmo gênero não isomorfas. Foram obtidas condições necessárias bastante restritivas para torres de curvas de tipo Artin-Schreier com bom comportamento assintótico para as razões entre número de pontos racionais e gênero, avançando no sentido de sua classificação. Foi também construída uma nova torre (mais simples do que as existentes) de corpos de funções sobre corpos finitos, com cardinalidade quadrada, atingindo a cota de Drinfeld-Vladut. Destaca-se como importante avanço a construção de uma torre de corpos de funções sobre corpos finitos de cardinalidade cúbica com um limite, para as razões acima mencionadas, recorde, generalizando uma cota obtida por T. Zink. Alguns desses trabalhos foram realizados em colaboração com H. Stichtenoth (Essen U.).

**Sistemas lineares sobre famílias de curvas e seus limites:** Foi realizado um estudo de limites de pontos de ramificação de sistemas lineares sobre famílias de curvas planas. Este problema é uma generalização do estudado por Zeuthen no Século XIX em sua determinação dos números característicos de cúbicas e quárticas. Foram descritas as degenerações de sistemas lineares para uma curva singular irreduzível, completando trabalho de Lax e Widland da década de 80. Foram também descritas degenerações de pontos de Weierstrass para uma curva nodal, estendendo resultados por nós obtidos anteriormente, em resposta a uma questão levantada por Eisenbud e Harris também na década de 80.

**Fibrados sobre curvas:** Foi estudada, em colaboração com S. Kleiman (MIT), a Jacobiana compactificada, que parametriza degenerações de fibrados em retas sobre uma curva irreduzível. Se a curva não é muito singular, foi provado que tal objeto é autodual, isto é, existe um isomorfismo natural entre seu esquema de Picard e a Jacobiana da curva. Recentemente, foi mostrado que este isomorfismo se estende a compactificações. Embora recentes, esses resultados encontram aplicações em trabalhos de G. Laumon e J. Sawon. Foi também desenvolvido, em colaboração com M. Popa, trabalho sobre o divisor teta generalizado no moduli de fibrados vetoriais de determinante constante sobre uma curva lisa. Foi encontrada uma cota efetiva para quando divisores, linearmente equivalentes a um múltiplo do divisor teta, mergulham o espaço de moduli.

**Teoria algébrica de singularidades:** Foram feitos progressos significativos na classificação, sob a ação do grupo de contato, dos germes de curvas analíticas planas em uma dada classe de equisingularidade. Foram encontradas formas normais e realizada a classificação completa de tais germes em várias classes particulares de equisingularidade e, notadamente, de todos os germes de multiplicidade 2, 3 e 4. Foram desenvolvidos métodos teórico-computacionais para calcular invariantes numéricos relevantes e para realizar a classificação. Foram também obtidos avanços na descrição da parte invariante das raízes dos polinômios de Bernstein-Sato associados a famílias topologicamente triviais de singularidades isoladas de hipersuperfícies complexas.

A contribuição do IM-AGIMB para a área, no período, foi essencialmente, na forma de apoio financeiro para a realização de eventos científicos, tais como a XVII e XVIII Escolas de Álgebra, além de permitir a circulação entre centros de pesquisa e centros emergente, propiciar visitas de pesquisadores estrangeiros e patrocinar a vinda de alunos latino-americanos para participar de cursos de verão.

### **Produção Científica**

1. A. Engler, A recursive description of pro- $p$ -Galois groups, *Journal of Algebra*, 274, 511-522, 2004.
2. A. Engler, D. Haran, D. Kochloukova e P. Zaleskii, Normal subgroups of profinite groups of finite cohomological dimension, *J. London Math. Society*, 69, 317-332, 2004.
3. A. Garcia e J. Bezerra, A Tower with non-Galois steps which attains the Drinfeld – Vladut Bound, *J. Number Theory*, 106, 142-154, 2004.
4. A. Garcia e M. Abdon, On a Characterization of certain maximal curves, *Finite Fields Appl.*, 10, 133-158, 2004.
5. A. Garcia, H. Stichtenoth e P. Beelen, On ramification and genus of recursive towers, *Portugaliae Math.*, 2004.
6. A. Garcia, P. Beelen e H. Stichtenoth, On Towers of function fields of Artin– Schreier Type, *Bull. Brazilian Math Soc* 35, (2004), 151-164, 2004.
7. A. Pacheco e M. Hindry, Sur le rang des Jacobiennes sur un corps de fonctions, *Bull. Soc. Math. de France*, 2004.
8. A. Pacheco, M. Hindry e R. Wazir, Conjectures de Tate et fibrations, *J. of Number Theory*, 2004.
9. A. Simis, Cremona Transformation and some related algebras, *J. Algebra*, 2004.
10. A. Simis, Differential idealizers and algebraic free divisors, in *Lect. Notes in P. and Appl. Math.*, Marcel Dekker, 2004.
11. E. Esteves e M. Popa, Effective very ampleness for generalized theta divisors, *Duke Math Journal*, 122 (3), 429-444, 2004.
12. E. Esteves e S. Kleiman, Bounds on leaves of foliations of the plane, *Contemporary Math.*, 2004.
13. F. Russo e A. Alzati, Some elementary extremal contractions between smooth varieties arising from projective geometry, *Proc. London Math. Soc.* 89, 25-53, 2004.
14. F. Russo e C. Ciliberto, On surfaces with two apparent double points, *Adv. in Geometry*, 2004.
15. F. Russo, C. Ciliberto e M. Mella, Varieties with one apparent double point, *J. Alg. Geom.* 13, 475-512, 2004.
16. F. Torres e C. Carvalho, On Goppa codes and Weierstrass gaps at several points. *Des. Codes Crypt.*, 2004.
17. F. Torres e C. Munuera, Bounding the trellis state complexity of algebraic geometric codes, *Appl. Alg. Eng. Comm. Comput.*, 2004.

18. F. Torres e M. Giulietti, On dense sets related to plane algebraic curves. *Ars Combinatoria*, 2004.
19. I. Vainsencher e F. Xavier, Numbers for reducible cubic scrolls, *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 2004
20. I. Vainsencher, Sur le nombre de singularités dégénérées d'une famille de feuilletages, *Math. Research Letters*, 11 (4), 2004.
21. I. Vainsencher e J. Koch, Kontsevich's formula for rational plane curves, Birkhäuser, 2004.
22. S. Collier, Primalidade em tempo polinomial, published by SBM - Brazilian Mathematical Society, 2004.
23. S. Collier, Quotient rings of noncommutative rings in the half of the 20<sup>th</sup> century, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 58 (3), 255-281, 2004.
24. A. Garcia e A. Garzon, On Kummer covers with many rational points over finite fields, *J. Pure Appl. Algebra*, 185, 177-192, 2003.
25. A. Garcia e H. Stichtenoth, On tame towers over finite fields, *J. Reine Angew Math.*, 557, 53-80, 2003.
26. A. Hefez, Irreducible Plane Curve Singularities, in *Lecture Notes in Pure and Applied Math.*, 232, Marcel Dekker, 1-120, 2003.
27. A. Hefez e M. E. Hernandez, Classification of algebroid curves with semigroup  $\langle 6, 9, 19 \rangle$ , *Comm. in Algebra*, 31, 3847-3861, 2003.
28. A. Pacheco, Distributions of the traces of Frobenius on elliptic curves over function fields, *Acta Arithmetica*, 106 (3), 255-263, 2003.
29. A. Simis, Two differential themes in characteristic zero, *Contemporary Math.*, 324, 195-204, 2003.
30. A. Simis e R. Villarreal, Constraints for the normality of monomial subrings and birationality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131, 2043-2048, 2003.
31. A. Simis, B. Ulrich and W. Vasconcelos, Rees algebras of modules, *Proc. London Math. Soc.*, 87(3), 610-646, 2003.
32. E. Esteves e L. Gatto, A geometric interpretation and a new proof of a relation of Cornalba and Harris, *Comm. in Algebra*, 31, 3753-3770, 2003.
33. E. Esteves e S. Kleiman, Bounding solutions of Pfaff equations, *Communications in Algebra*, 31, 3771-3793, 2003.
34. E. Esteves e S. Kleiman, Bounds on leaves of one-dimensional foliations, *Bulletin Braz Math Soc.*, 34, 145-169, 2003.
35. F. Russo, Tangents and Secants of Algebraic Varieties, *Publicações Matemáticas, IMPA*, 2003.
36. F. Russo e A. Alzati, Special subhomaloidal systems of quadrics and varieties with one apparent double point, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 134 (1), 65-82, 2003.
37. F. Torres e C. Carvalho, On numerical semigroups related to coverings of curves. *Semigroup Forum*, 67, 344-354, 2003.

38. F. Torres e C. Munuera, A Goppa-like bound on the trellis state complexity of algebraic geometric codes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 49 (3), 733–737, 2003.
39. S. Collier, Indecomposable non-holonomic D-modules in dimension 2, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 46, 341-355, 2003.
40. S. Collier, Non-holonomic irreducible D-Modules over complete intersections, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131, 83-86, 2003.
41. S. Collier, On the differential simplicity of polynomial rings, *J. of Algebra*, 264, 442-468, 2003.
42. S. Collier e J.C. Mc Connell, The quest for quotient rings, *Amer. Math. Monthly*, 110, 298-313, 2003.
43. Y. Lequain, P. Brumatti and D. Levcovitz, Differential simplicity in polynomial rings and algebraic independence of power series, *J. London Math. Soc.*, 68, 615-630, 2003.
44. A. Garcia e Y. Lequain, *Elementos de Álgebra*, Projeto Euclides, IMPA, 2002.
45. A. Hefez e M. L. T. Villela, *Códigos Corretores de Erros*, Série de Computação e Matemática, IMPA, 2002.
46. A. Simis, K. Smith e B. Ulrich, An algebraic proof of Zak's inequality for the dimension of the Gauss image, *Math. Z.*, 241, 871-881, 2002.
47. A. Simis, P. Brumatti, Y. Lequain e D. Levcovitz, A note on the Nakai conjecture, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130, 15-21, 2002.
48. E. Esteves, The Castelnuovo-Mumford regularity of an integral variety of a vector field on projective space, *Math. Res. Letters* 9 (1), (2002), 1-15
49. E. Esteves e N. Medeiros, Limit canonical systems on curves with two components. *Invent. Math.*, 149 (2), 267-338, 2002.
50. E. Esteves, M. Cagne e S. Kleiman – Autoduality of the compactified Jacobian, *J. London Math. Soc.*, 56 (3), 591-610, 2002.
51. F. Russo, The antibirational involutions of the plane and the classification of real del Pezzo surfaces, in *Algebraic Geometry de Gruyter volume in memory of Paolo Francia*, 289-312, 2002.
52. F. Russo e A. Alzati, On the k-normality of projected algebraic varieties, *Bull Braz. Math. Soc.*, 33 (1), 27-48, 2002.
53. F. Russo e A. Alzati, The usual Castelnuovo's lemma and subhomaloidal linear system of quadrics, *Le Matematiche*, LV (II), 373-385, 2002.
54. F. Torres e G. Korchmaros, On the genus of a maximal curve, *Math. Ann.*, 323 (3), 589-608, 2002.
55. F. Torres, M. Giulietti, F. Pambianco and E. Ughia, On complete arcs arising from plane curves, *Des. Codes Cryptogr.*, 25 (3), 237-246, 2002.
56. F. Torres, M. Giulietti, F. Pambianco e E. Ughia, On large complete arcs: odd case, *Discrete Mathematics*, 255, 145-159, 2002.
57. I. Vainsencher, Hypersurfaces with up to six double points, *Communications in Algebra*, 31 (9), 4107-4129, 2002.

58. I. Vainsencher e F. Xavier, A compactification of the space of twisted cubics, Math. Scand., 91 (2), 221-243, 2002.
59. I. Vainsencher e J. Rojas, Canonical curves in  $P^3$ , Proc. London Math. Soc., 85 (3), 333-366, 2002.
60. N. Medeiros, On canonical curves and osculating spaces, J. Pure Appl. Alg., 170, 267-285, 2002.

### **Formação de Doutores**

1. Juscelino Bezerra dos Santos. Duas Torres de Corpos de Funções sobre corpos finitos e as cotas de Drinfeld, Vladut e de Zink, 2004. Orientador: Arnaldo Garcia (IMPA)
2. Patrícia Helena Araújo da Silva Nogueira. Limites de sistemas lineares em Curvas de Gorenstein, 2003. Orientador: Eduardo Esteves (IMPA)
3. Parham Salehyan. Limit Weierstrass Points on Nodal Curves, 2003. Orientador: Eduardo Esteves (IMPA)
4. Ercilio Carvalho da Silva, 2003. Orientador: Fernando Torres Orihuela (Unicamp)